www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

1990

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

N.B. : Les 3 parties, et, à l'intérieur de chaque partie, les différentes questions sont largement indépendantes.

On effectue des tirages avec remise dans une population $\mathcal{P}$ de N individus, chaque individu ayant égale probabilité d'être tiré. Il s'agit d'étudier la variable aléatoire, notée Y_r, égale au nombre de tirages nécessaires pour que pour la première fois r individus de $\mathcal{P}$ distincts fixés à l'avance aient été tirés, l'ordre d'apparition de ces individus n'intervenant pas. On note $a_1, \ldots, a_r$ ces individus ($1 \leqslant r \leqslant N$). Les (N-r) autres individus de $\mathcal{P}$ seront notés $a_{r+1}, \ldots, a_N$.

I. Etude de cas particuliers.

1. On prend dans cette question $r = 1$. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1 ; calculer sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y_r.

3. Calculer la probabilité $Pr(Y_r = r)$.

4. On propose de calculer la probabilité $Pr(Y_r = r+1)$ par la méthode combinatoire suivante : on note E l'événement $(Y_r = r+1)$; E est alors réunion des différents événements obtenus en considérant les différents ordres possibles d'apparition des individus $a_1, \ldots, a_r$. Soit E_0 l'événement inclus dans E qui correspond à l'apparition de $a_1, \ldots, a_r$ de telle sorte que la première apparition de a_i précède la première apparition de a_{i+1}, pour tout i de 1 à r-1.

a) Exprimer $Pr(E)$ en fonction de $Pr(E_0)$.

b) E_0 correspond à (r+1) tirages, ayant amené les individus $a_1,\ldots,a_r$, ainsi qu'un individu que l'on note "x". A quelle partie de $\mathcal{P}$ appartient l'individu x ?

c) On note $E_{0,1}$ l'événement, inclus dans E_0, correspondant au choix de x dans l'ensemble $\{a_1,\ldots,a_{r-1}\}$. On note $E_{0,2}$ l'événement, inclus dans E_0, correspondant au choix de x dans l'ensemble $\{a_{r+1},\ldots,a_N\}$. Calculer séparement les probabilités $Pr(E_{0,1})$ et $Pr(E_{0,2})$.

d) Déduire de ce qui précède la probabilité de E.

II. Décomposition de Y_r en somme.

On appelle W_i pour $1 \leqslant i \leqslant r$ la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que pour la première fois i individus de $\{a_1,\ldots,a_r\}$ apparaissent.

On note $X_1 = W_1$ et pour $i \in \{2,\ldots,r\}$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.

On a donc : $W_r = Y_r = X_1 + X_2 + \ldots + X_r$.

1. Expliquer ce que représentent les variables aléatoires (X_i) et pourquoi elles sont indépendantes.

2. a) Montrer que la loi de X_i est de la forme :

$$P(X_i = n) = \frac{r - i + 1}{N} A^{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

où A est un nombre réel dépendant de N, r et i, à calculer.

b) Calculer la fonction génératrice de X_i, son espérance et sa variance.

3. Déduire du 2. l'expression de l'espérance et de la variance de Y_r au moyen des sommes $S_{1,r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}$ et $S_{2,r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2}$.

Déterminer un équivalent de l'espérance et de la variance de Y_N quand N tend vers $+\infty$.

(On pourra montrer que $S_{1,N} \underset{N \to +\infty}{\sim} \ln N$, en encadrant $\int_1^N \frac{dx}{x}$).

4. Montrer que la fonction génératrice de Y_r est une fraction rationnelle, dont on donnera l'expression. Décomposer cette fraction rationnelle en éléments simples, puis en série entière. En déduire l'expression de la probabilité $Pr(Y_r = n)$ sous forme de somme. Exprimer la probabilité $Pr(Y_r \leqslant n)$ avec un seul signe Σ.

III. Etude des lois limites

Dans cette partie III, l'entier r est fixé.
On admet le résultat suivant, déduit de II :

$Pr(Y_r \leqslant n) = \frac{K}{N^n} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i (N-i)^n$, où K est une certaine constante.

1. Calculer la limite de $Pr(Y_r \leqslant n)$ quand N et n tendent vers $+\infty$ de façon à ce que $\frac{n}{N}$ tende vers le nombre réel p ($p \in]0,+\infty[$).

2. a) Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, de fonction de répartition G et de fonction de densité g, telle que :

$$\forall p > 0 \qquad G(p) = K_1(1 - e^{-p})^r.$$

(K_1 constante à calculer).

b) Calculer la fonction g et tracer son graphe.

3. Prouver que la loi de Z est la loi du maximum de r variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi.

4. Calculer l'espérance de Z.

En notant $S_{1,r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i}$, on établira successivement les formules :

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_n^k = S_{1,n}$ puis (2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{(k+1)^2} = \frac{S_{1,n+1}}{n+1}$, pour arriver à l'expression : $E(Z) = S_{1,r}$.

ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX
et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Opt. Bio. Math.-Math 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail